SIDUMID JA SEOSED

Kahe hulga positsioneerimatus paaris

- Vaatleme kaht hulka H_1 ning H_2 ja neist koosnevaid paare $\{ H_1, H_2 \}$ ning $\{ H_2, H_1 \}$.

- Kuna mõlemad paarid koosnevad samadest elementidest, siis ekstensionaalsuse aksioomi põhjal peab kehtima võrdus $\{ H_1, H_2 \} = \{ H_2, H_1 \}$.

- Seetõttu võime öelda, et paaris pole ***põhimõtteliselt*** selge, kumb element on esimene ja kumb on teine

Kahe hulga positsioneerimatus paaris

- **Probleem:** Mida tähendab **on esimene** või **on teine**

- **Probleem:** Milline peaks olema **niisugune konstruktsioon** uue hulga G' moodustamiseks, mis (1) on moodustatud kahest hulgast H'_1 ja H'_2 lähtudes, kusjuures

  (2) ***kui*** **seda sama konstruktsiooni** kasutades moodustada veel mõni uus hulk G'' kahest hulgast H''_1 ja H''_2 lähtudes,

  siis võrdus G' = G'' saab kehtida ainult juhul, kui $H'_1 = H''_1$ ja samas $H'_2 = H''_2$.

Järjestatud paari moodustamine

- Vaatleme kaht hulka H_1 ning H_2 ja neist moodustatud uut hulka G, mille korral kehtib võrdus $G=\{\{H_1\}, \{H_1, H_2\}\}$

Teoreem. Kui mingite hulkade H'_1 ja H'_2 korral $G'=\{\{H'_1\}, \{H'_1, H'_2\}\}$ ja mingite hulkade H''_1 ja H''_2 korral $G''=\{\{H''_1\}, \{H''_1, H''_2\}\}$, siis võrdus $G'=G''$ kehtib ainult juhul, kui kehtivad võrdused $\mathbf{H'_1= H''_1}$ ja $\mathbf{H'_2 = H''_2}$.

Märkus. Äsjaesitatud teoreemi alusel võime eelsõnastatud probleemi lahendada järgmise **moodustamise viisi** abil:

$\{\{\ \}, \{\ \ ,\ \}\}$

Järjestatud paarid

Määratlus. (Kuratowski 1921) Hulkadest H_1 ning H_2 moodustatud uut hulka G, mille korral kehtib võrdus

$G=\{ \{H_1\}, \{H_1, H_2\} \}$ nimetame hulkadest H_1 ja H_2 moodustatud **järjestatud paariks** ning tähistame kirjutisega $\langle H_1, H_2 \rangle$.

Seejuures nimetame hulka H_1 järjestatud paari $\langle H_1, H_2 \rangle$ **esimeseks elemendiks** ja hulka H_2 järjestatud paari $\langle H_1, H_2 \rangle$ **teiseks elemendiks.**

Järeldus. Võrdus $\langle H'_1, H'_2 \rangle = \langle H''_1, H''_2 \rangle$ kehtib parajasti siis, kui kehtivad võrdused $H'_1=H''_1$ ja $H'_2=H''_2$

Suvalise pikkusega sidumid ehk korteežid

Määratlus. Hulkadest $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, H_{n+1}$ moodustatud sidumiteks ehk korteežideks nimetame järgmisi hulki:

- Järjestatud paari $\langle H_1, H_2 \rangle$ nimetame hulkadest H_1 ning H_2 moodustatud **kahekohaliseks sidumiks ehk korteežiks**, mille **esimeseks elemendiks** nimetame hulka H_1 ja **teiseks elemendiks** nimetame hulka H_2
- Olgu $\langle H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n \rangle$ n-kohaline sidum. Järjestatud paari $\langle \langle H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n \rangle, H_{n+1} \rangle$ nimetame hulkadest $H_1, \ldots, H_{n+1}$ moodustatud **n+1-kohaliseks sidumiks ehk korteežiks** ja tähistame kirjutisega $\langle H_1,H_2,H_3,\ldots,H_n,H_{n+1} \rangle$, mille **esimeseks elemendiks** nimetame hulka H_1 ja **teiseks elemendiks** nimetame hulka H_2 **… …** ja **n+1-ks elemendiks** nimetame hulka H_{n+1}

Sidumite ehk korteežide võrdlemine

Korteežide ehk sidumite põhiteoreem.

Kaks korteeži on võrdsed parajasti siis kui nad on ühe ja sama kohalisusega (näiteks mõlemad on kolmekohalised) ja kui samadel (ehk täpsemalt sama numbriga) kohtadel figureerivad samad hulgad.

Ehk teiste sõnadega: Võrdus $\langle A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \rangle = \langle B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m \rangle$ kehtib parajasti siis, kui kehtivad võrdused $\mathbf{n = m}$ ning

$A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$, … … , $A_n = B_m$

Naturaalarvudest moodustatud järjestatud paarid

$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 0,4\rangle$	$\langle 0,5\rangle$	$\langle 0,6\rangle$	… … …
$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,3\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,6\rangle$	… … …
$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	… … …
$\langle 3,0\rangle$	$\langle 3,1\rangle$	$\langle 3,2\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	$\langle 3,4\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	… … …
$\langle 4,0\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 4,3\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	$\langle 4,5\rangle$	$\langle 4,6\rangle$	… … …
$\langle 5,0\rangle$	$\langle 5,1\rangle$	$\langle 5,2\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 5,4\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	$\langle 5,6\rangle$	… … …
$\langle 6,0\rangle$	$\langle 6,1\rangle$	$\langle 6,2\rangle$	$\langle 6,3\rangle$	$\langle 6,4\rangle$	$\langle 6,5\rangle$	$\langle 6,6\rangle$	… … …
…	…	…	…	…	…	…	… … …
…	…	…	…	…	…	…	… … …

Probleem: Leida ülalesitatud tabelis igale paarile $\langle x,y\rangle$ seda iseloomustav **number n** nõnda, et teades numbri n väärtust, saame teada ka vastavate x ja y väärtused.

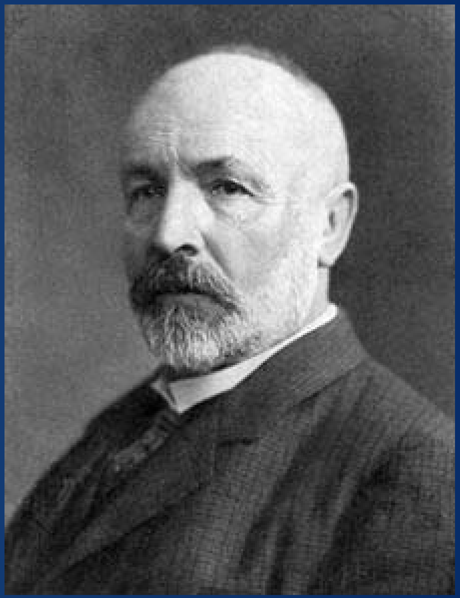
Naturaalarvudest moodustatud järjestatud paaride Cantori numeratsioon

⟨0,0⟩	**⟨0,1⟩**	**⟨0,2⟩**	**⟨0,3⟩**	**⟨0,4⟩**	**⟨0,5⟩**	**⟨0,6⟩**	… … …
⟨1,0⟩	**⟨1,1⟩**	**⟨1,2⟩**	**⟨1,3⟩**	**⟨1,4⟩**	**⟨1,5⟩**	⟨1,6⟩	… … …
⟨2,0⟩	**⟨2,1⟩**	**⟨2,2⟩**	**⟨2,3⟩**	**⟨2,4⟩**	⟨2,5⟩	⟨2,6⟩	… … …
⟨3,0⟩	**⟨3,1⟩**	**⟨3,2⟩**	**⟨3,3⟩**	⟨3,4⟩	⟨3,5⟩	⟨3,6⟩	… … …
⟨4,0⟩	**⟨4,1⟩**	**⟨4,2⟩**	⟨4,3⟩	⟨4,4⟩	⟨4,5⟩	⟨4,6⟩	… … …
⟨5,0⟩	**⟨5,1⟩**	⟨5,2⟩	⟨5,3⟩	⟨5,4⟩	⟨5,5⟩	⟨5,6⟩	… … …
⟨6,0⟩	⟨6,1⟩	⟨6,2⟩	⟨6,3⟩	⟨6,4⟩	⟨6,5⟩	⟨6,6⟩	… … …
…	…	…	…	…	…	…	… … …
…	…	…	…	…	…	…	… … …

Paari ⟨x,y⟩ Cantori number **c(x,y) = x + (x+y)(x+y+1)/2**

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
3.märts, 1845
Saint Petersburg, Venemaa
–
6.jaanuar, 1918 (vanuses 72)
Halle, Province of Saxony, German Empire



Cantori funktsioonid

Määratlus. Cantori funktsioonideks, mille tähisteks on kirjutised c^m ja c_{mj}, kus $m \geq 2$ ning $m \geq j \geq 1$, nimetame funktsioone, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

$c^2(x,y) = c(x,y) = x + (x+y)(x+y+1)/2$

$c_{21}(n) = n - w(w+1)/2$ ja $c_{22}(n) = w - c_{21}(n)$, kus **w** on esimene niisugune arv, mille korral kehtivad võrratused

$$w(w+1)/2 \leq n < (w+1)(w+2)/2$$

$c^{m+1}(x,y, \dots , z,u) = c(c^m(x,y, \dots , z), u)$

$c_{m+1m+1}(n) = c_{22}(n)$, $c_{m+1m}(n) = c_{22}(c_{21}(n))$, … …

$c_{m+12}(n)=c_{22}(c_{21}(\dots(c_{21}(n)\dots))$, $c_{m+11}(n)=c_{21}(c_{21}(\dots(c_{21}(n)\dots))$

Cantori funktsioonide omadusi

- **Kui** $c^2(x,y) = n$, **siis** $c_{21}(n) = x$ **ja** $c_{22}(n) = y$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$c_{21}(n)$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
$c_{22}(n)$	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0

$c^2(c_{21}(n)\ ,\ c_{22}(n)) = n$

$c_{21}(c^2(x,y)) = x$

$c_{22}(c^2(x,y)) = y$

Kui $c^3(x,y,z) = m$, siis $c_{31}(m) = x$, $c_{32}(m) = y$, $c_{33}(m) = z$

$c^3(c_{31}(m)\ ,\ c_{32}(m),\ c_{33}(m)) = m$

$c_{31}(c^3(x,y,z)) = x$

$c_{32}(c^3(x,y,z)) = y$

$c_{33}(c^3(x,y,z)) = z$

Cartesiuse korrutised

Määratlus. Hulkade A ja B ***Cartesiuse korrutiseks*** nimetame hulka $\{\langle\alpha,\beta\rangle \mid (\alpha\in A)\&(\beta\in B)\}$,

mida tähistame kirjutisega $A\times B$.

Seega - $A\times B = \{\langle\alpha,\beta\rangle \mid (\alpha\in A)\&(\beta\in B)\}$

Näide 1. Kui $A=\{1,2\}$ ja $B=\{x,y,z\}$, siis

$A\times B=\{\langle 1,x\rangle, \langle 1,y\rangle, \langle 1,z\rangle, \langle 2,x\rangle, \langle 2,y\rangle, \langle 2,z\rangle\}$

$B\times A=\{\langle x,1\rangle, \langle x,2\rangle, \langle y,1\rangle, \langle y,2\rangle, \langle z,1\rangle, \langle z,2\rangle\}$

Järeldus. **Üldjuhul** $A\times B \neq B\times A$

Määratlus (järg). $A\times\ldots\times B\times C=(A\times\ldots\times B)\times C$

René Descartes
(1596 – 1650)

Teoreem. Kui hulgad A,…, B, C on lõplikud, siis
$E(A\times\ldots\times B\times C)=E(A)\cdot\ldots\cdot E(B)\cdot E(C)$.

Cartesiuse astmed

<u>Määratlus.</u> Hulga A ***Cartesiuse astmed***

$A^{(0)}=1=\{\varnothing\}$, $A^{(1)}=A$, $A^{(n+1)}=A^{(n)}\times A$

<u>Näited.</u> Kui $H=\{0,1\}$, siis

$H^{(1)}=H$

$H^{(2)}=\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$,

$H^{(3)}=\{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}$

Predikaatide määratlus I

- **Ühekohaliseks predikaadiks** hulgas H ehk hulga H **elementide omaduseks** nimetame hulga H suvalist osahulka Ω. ***Kui*** Ω tähistab hulga H elementide mingit omadust ja α tähistab hulga H mingit elementi, ***siis***
- $\Omega(\alpha) \int$ elemendil α on omadus Ω
- elemendil α on omadus $\Omega \int \alpha \in \Omega$

Omaduste näited I

- Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0} ning omadust ∇, mille korral
  $\nabla(\alpha)$ ∫ element α on nurgeline.
  Sellisel juhul ∇={△,◇,☆}
- Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0} ning omadust Ω,
  mille korral $\Omega(\beta)$ ∫ element β on ümar.
  Sellisel juhul Ω ={○,0}
- Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0} ning omadust K,
  mille korral K(γ) ∫ element γ on iseküIgne.
  Sellisel juhul K=∅
- Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0} ning omadust M,
- mille korral M(ε) ∫ element ε on mõõtuv.
  Sellisel juhul M={△,◇,○,☆,0}

Omaduste näited II

- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust P, mille korral P(m) ∫ element m on paarisarv. Sellisel juhul P={2,4,6}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust T, mille korral T(u) ∫ element u on täisruut. Sellisel juhul T={1,4}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust Q, mille korral Q(t) ∫ element t on kuuekohaline. Sellisel juhul Q=∅
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust Pos, mille korral Pos(e) ∫ element e on positiivne. Sellisel juhul Pos= {1,2,3,4,5,6}

Predikaatide määratlus II

- **k+1-kohaliseks predikaadiks** ehk **k+1-kohaliseks seoseks hulkade** $H_1, H_2, \ldots, H_k, H_{k+1}$ elementide vahel nimetame hulga $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k \times H_{k+1}$ suvalist osahulka

Kui Φ tähistab mingit seost $H_1, H_2, \ldots, H_k, H_{k+1}$ elementide vahel ja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ tähistavad mingeid elemente vastavatest hulkadest, **siis**

- $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \int \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ on seoses Φ

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ on seoses $\Phi \int [\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle \in \Phi]$ $\& \ [\Phi \subseteq H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k \times H_{k+1}]$

Teoreem. Mistahes m-kohaline seos on olemuselt m-kohaliste predikaatide omadus.

Tõestus. Tuleneb seose ja omaduse definitsioonist.

Funktsionaalsed seosed

Määratlus. Mingit k+2-kohalist seost **F** nimetatakse k+**2**-kohaliseks funktsionaalseks seoseks ehk (NB!) k+**1**-kohaliseks funktsiooniks, kui selle seose kõikide sidumite viimased elemendid on eelnevate poolt üheselt määratud ehk lühemalt:

kui $\langle x_1, \ldots , x_{k+1}, y'\rangle \in \mathbf{F}$ ning $\langle x_1, \ldots , x_{k+1}, y''\rangle \in \mathbf{F}$, siis $y' = y''$.

Kokkuleppeliselt kasutatakse järgmist tähistusviisi:

$$\mathbf{F}(x_1, \ldots , x_{k+1})=y \int \langle x_1, \ldots , x_{k+1}, y\rangle \in \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}(x_1, \ldots , x_{k+1}) \int (\exists\, y)[\ \mathbf{F}(x_1, \ldots , x_{k+1})=y\ \&\ \langle x_1, \ldots , x_{k+1}, y\rangle \in \mathbf{F}\ ]$$

Kokkulepe. Kahekohalise funktsiooni sümbol kirjutatakse sageli "vahele", mitte ette. Näiteks $m+n$, mitte aga $+(m,n)$.
Samas aga kirjutatakse reeglina $\max(\alpha,\beta)$, mitte aga $\alpha \max \beta$.

Funktsioonide näiteid

- Kahekohaline seos F, mille korral F(x)=t ∫ x isa on t **on** ühekohaline funktsioon
- Kolmekohaline seos P, mille korral

  P(x,y)=c ∫ x ja y on c vanemateks

  ei ole kahekohaline funktsioon
- Kolmekohaline seos d, mille korral

  d(u,w)=r ∫ u ja w vaheline kaugus on r

  on kahekohaline funktsioon
- Neljakohaline seos Ekvid, mille korral

  Ekvid(m,n,p,q) ∫ |m–n|=|p–q|

  ei ole kolmekohaline funktsioon